CHAP 02 Notions de logique - Exercices

Exercice 1

1. On note F et M les affirmations suivantes :
   - F : « Richard aime le foot » ;
   - M : « Richard aime les maths ».

   Représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique en utilisant F, M et des connecteurs logiques :
   a. A : « Richard aime le foot mais pas les maths » ;

   $F \wedge \overline{M}$

   b. B : « Richard n'aime ni le foot ni les maths » ;

   $\overline{F} \wedge \dots$

   c. C : « Richard aime le foot ou il aime les maths et pas le foot » ;

   $\dots \vee (\dots \wedge \dots)$

   d. D : « Richard aime les maths et le foot ou il aime les maths mais pas le foot ».

   $(\dots\dots) \vee (\dots\dots)$

2. Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes :
   a. P : « $(\pi = 5)$ et $(2 + 3 = 5)$ » ;

   $(F \wedge V) \Leftrightarrow \dots$

   b. Q : « $(\pi = 5)$ ou $(2 + 3 = 5)$ » ;

   $(F \vee V) \Leftrightarrow \dots$

   c. R : « $(\pi \approx 3{,}14) \Rightarrow (5 + 6 = 11)$ » ;

   $(V \Rightarrow \dots) \Leftrightarrow \dots$

   d. S : « $(\pi = 5) \Rightarrow (2 + 3 = 5)$ » ;

   $(\dots \Rightarrow \dots) \Leftrightarrow \dots$

   e. T : « $(4 = 5) \Rightarrow$ (P est vrai) » ; (P est la proposition citée plus haut)

   $(\dots \Rightarrow \dots) \Leftrightarrow \dots$

   f. U : « $(5 + 5 = 10) \Leftrightarrow (\pi = 11)$ ».

   $(\dots \Leftrightarrow \dots) \Leftrightarrow \dots$

Exercice 2

1. Écrire sans implication la proposition « $(x > 1) \Rightarrow (y = 3)$ ».

   Penser à l'autre écriture d'une implication…

2. Soient P et Q deux propositions.
   a. Écrire autrement l'implication $P \Rightarrow Q$.

   Penser à l'autre écriture avec $\vee$

   b. Écrire la réciproque de $P \Rightarrow Q$.
   c. Écrire la contrapposée de $P \Rightarrow Q$.
   d. Écrire la négation de $P \Rightarrow Q$.

   Penser aux lois de De Morgan

3. On considère l'implication : « Si n est un entier impair alors le chiffre des unités de n^2 est impair. »
   a. Identifier les propositions P et Q dans l'implication précédente.
   b. En déduire la réciproque, la contrapposée et la négation de l'implication précédente.

   Penser aux résultats d'une question précédente

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 3 ··· QUESTIONS DE *COURS* ···

Compléter la table de vérité suivante, rappelant les définitions et propriétés des connecteurs classiques

	P	Q	¬P	P ∧ Q	P ∨ Q	P ⇒ Q	P ⇔ Q	P ⊕ Q
	V	V						
	V	F						
	F	V						
	F	F						
Se lit :			non P	P et Q	P ou Q	si P alors Q	P ssi Q	P oux Q

Exercice 4

1. $\mathcal{V}$ désigne une proposition toujours vraie, et $\mathcal{F}$ une proposition toujours fausse.
   Démontrer, à l'aide de tables de vérités, les propositions suivantes :
   a. $(P \vee \mathcal{F}) \Leftrightarrow P$ puis $(P \vee \mathcal{V}) \Leftrightarrow \mathcal{V}$.
   b. $(P \wedge \mathcal{V}) \Leftrightarrow P$ puis $(P \wedge \mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{F}$.
2. À l'aide d'une table de vérité, démontrer les équivalences suivantes :
   a. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$
   b. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q}))$

Exercice 5

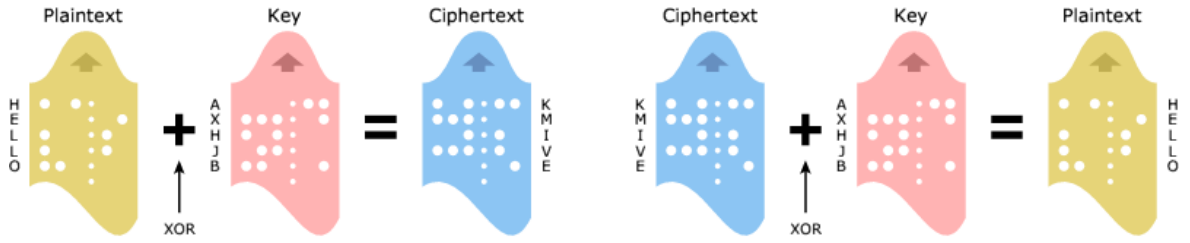
1. Écrire $P \oplus Q$ à l'aide des seuls connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$.

   Repérer dans le tableau de rappel les lignes où $P \oplus Q$ est vrai

2. Que valent $P \oplus \mathcal{F}$ et $P \oplus \mathcal{V}$? Justifier à l'aide du tableau de rappel.
3. Démontrer que $(P \oplus Q) \oplus Q \Leftrightarrow P$.

P	Q	P ⊕ Q	(P ⊕ Q) ⊕ Q

4. **Chiffrement par masque jetable.** On code un message en appliquant $\oplus$ « bit à bit » avec une clé secrète de même longueur (1 pour $\mathcal{V}$, 0 pour $\mathcal{F}$). Le message est A = 0110 1100 et la clé est B = 1011 0110.
   a. Calculer le message chiffré C = A ⊕ B.
   b. Calculer C ⊕ B. Que retrouve-t-on, et quelle propriété de la question 3 permet de l'expliquer ?



https://www.cryptomuseum.com/crypto/vernam.htm

Exercice 6

1. **a.** Établir la table de vérité de chacune des propositions $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ et $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$

P	Q	R	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

b. Ces deux propositions sont-elles équivalentes ?

On compare leurs valeurs de vérités...

2. **a.** Établir la table de vérité de la proposition suivante :

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee Q).$$

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$	$P \vee Q$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee Q)$

b. À quelle proposition plus simple est-elle équivalente ?

On repère une « colonne existante »...

c. Mêmes questions avec $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$.

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$	$P \wedge Q$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

3. **a.** P, Q et R étant des propositions quelconques, établir la table de vérité de :

$$(P \wedge Q) \Rightarrow R \quad \text{et} \quad (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \quad \text{et} \quad (P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R).$$

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$

b. En déduire une équivalence entre deux des trois propositions ci-dessus.

On cherche deux « colonnes égales »...

Exercice 7 ··· FIL ROUGE *DRONE* ···

Une station de contrôle autorise le décollage d'un drone si les trois conditions suivantes sont réunies :

- la batterie est chargée à plus de 20 % ;
- aucune alerte météo n'est active ;
- la zone de vol est dégagée.

On note :

- B : « la batterie est chargée à plus de 20 % » ;
- M : « une alerte météo est active » ;
- Z : « la zone de vol est dégagée ».

1. Écrire la proposition $\mathcal{P}$: « le décollage est autorisé » à l'aide de B, M, Z et de connecteurs logiques.
2. Établir la table de vérité de $\mathcal{P}$.

B	M	Z	$\overline{\text{M}}$	$\mathcal{P}$

3. À l'aide des lois de De Morgan, écrire la négation $\overline{\mathcal{P}}$ (condition de **refus** du décollage), sans double négation.
4. Un jour donné, la batterie est chargée à 45 %, une alerte météo orange est active, et la zone de vol est dégagée. Le décollage est-il autorisé ? Justifier à l'aide de la table de vérité.

Exercice 8 ··· UN PEU D'*INFORMATIQUE* ···

Un pare-feu applique la règle d'autorisation suivante à chaque paquet entrant : le trafic est autorisé si le port de destination est le port 80 ou le port 443, **et** si l'adresse IP source ne figure pas sur la liste noire. On note :

- P : « le port de destination est le port 80 » ;
- Q : « le port de destination est le port 443 » ;
- N : « l'adresse IP source figure sur la liste noire ».

1. Écrire la proposition $\mathcal{R}$: « le trafic est autorisé » à l'aide de P, Q, N et de connecteurs logiques.
2. Établir la table de vérité de $\mathcal{R}$.

P	Q	N	P $\vee$ Q	$\overline{\text{N}}$	$\mathcal{R}$

3. À l'aide des lois de De Morgan, écrire la négation $\overline{\mathcal{R}}$ (condition de **blocage** du paquet), sans double négation.
4. Un paquet se présente sur le port 443, et son adresse IP source figure sur la liste noire. Le trafic est-il autorisé ? Justifier à l'aide de la table de vérité.

Licence Ouverte Etalab 2.0