CHAP 01 Calculs booléens

Compétences

- Comprendre le fonctionnement de variables booléennes
- Maîtriser quelques techniques de calculs
- Utiliser un tableau de Karnaugh
- Simplifier une expression booléenne ou son contraire

Fil rouge *coloration drone*

Un drone embarque de nombreux capteurs (booléens) dont les combinaisons déterminent les autorisations de vol. C'est un terrain idéal pour les tables de vérité et la simplification via une table de Karnaugh.

I. Algèbre de Boole

I.1. Définition

Intro

Un phénomène **binaire** est constitué d'éléments se présentant sous la forme de deux états distincts, notés 1 et 0, qui s'excluent mutuellement. Le cas le plus élémentaire est celui d'un interrupteur d'un circuit électrique, qui peut être ouvert (état 0) ou fermé (état 1).
Cet exemple très simple est pourtant au fondement même de l'informatique (avec les **transistors**).
Ce type de situation peut être modélisé par l'utilisation de règles logiques qui reviennent à effectuer un calcul dans le cadre d'une certaine structure qu'on appelle, en mathématiques, une **algèbre de Boole**.

Point histoire *(Anecdote)*

George Boole (1815 – 1864, 🇬🇧) enseignait au *Queen's College* à Cork et un jour qu'il faisait le trajet de 3 km à pied depuis son domicile et qu'il pleuvait, il attrapa une pneumonie. Sa femme, pensant qu'un remède doit ressembler à la cause, le mit au lit et lui jeta des bassines d'eau dessus pendant plusieurs jours ! Ce qui eut pour effet d'achever prématurément une carrière brillante…

I.2. Structure d'algèbre de Boole

Définition 1.1

Un ensemble B non vide muni de deux lois de composition interne (addition et multiplication), d'une opération unaire, notée $a \mapsto \overline{a}$, et possédant deux éléments privilégiés, notés 0 et 1, a une structure d'algèbre de Boole si les propriétés suivantes sont vraies : $\forall a \in \mathrm{B}$, $\forall b \in \mathrm{B}$, $\forall c \in \mathrm{B}$,

- $(a+b)+c = a+(b+c)$ — associativité de $+$
- $(ab)c = a(bc)$ — associativité de $\times$
- $a+b = b+a$ — commutativité de $+$
- $a \times b = b \times a$ — commutativité de $\times$
- $a+0 = a$ et $a \times 1 = a$ — élément neutre de $+$ et $\times$
- $a+bc = a+(bc) = (a+b)(a+c)$ — distributivité de $+$ sur $\times$
- $a(b+c) = (ab+ac)$ — distributivité de $\times$ sur $+$
- $a+\overline{a} = 1$ et $a \times \overline{a} = 0$ — compléments pour $+$ et $\times$

Remarques 1.1

- Par convention, l'opération $\times$ a priorité sur l'opération $+$.
- On peut noter ab au lieu de $a \times b$.

▸ **Notation 1.1**

On peut noter une analogie entre les opérateurs de calculs booléens et les opérateurs de logiques (propositionnelle ou ensembliste) :

Propositions	$\vee$	$\wedge$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	V	F	P	Q
Sous-ensembles de E	$\cup$	$\cap$	$=$	$\overline{A}$	E	$\varnothing$	A	B
Algèbre de Boole	$+$	$\times$	$=$	$\overline{a}$	1	0	a	b

II. Propriétés

II.1. Calculs et loi

▸ **Propriétés 2.1**

Soit B un ensemble muni d'une structure d'algèbre de Boole.
Des axiomes ci-dessus, on peut déduire les propriétés suivantes ; $\forall a \in B, \forall b \in B, \forall c \in B$,

- $a + a = a$
- $a + 1 = 1$
- $a + ab = a$
- $a\,a = a$
- $a \times 0 = 0$
- $a(a + b) = a$
- $\overline{\overline{a}} = a$
- Loi de De Morgan : $\overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$
- Loi de De Morgan : $\overline{a + b} = \overline{a}\overline{b}$.

II.2. Lien avec les tables de vérité

▸ **Remarque 2.1**

Les variables considérées dans une algèbre de Boole ne peuvent prendre que deux valeurs : 0 ou 1.
On peut donc utiliser une table pour illustrer (ou démontrer) les propriétés.

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	b	ab
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

▸ **Remarques 2.2**

On visualise immédiatement que l'addition correspond à OU, la multiplication à ET et la complémentation à NON.

Dans une expression, la complémentation est prioritaire sur la multiplication, qui est elle même prioritaire sur l'addition.

▸ **Exemple 2.1**

Soit l'expression $a + \overline{b}c$ pour $a = 0$, $b = 1$ et $c = 0$:

$0 + 1 \times \overline{0} = 0 + 1 \times 1 = 0 + 1 = 1$

▸ **Démonstration** *(Lois de De Morgan)*

En utilisant une table de vérité :

a	b	$a + b$	$\overline{a + b}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{a}\overline{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

II.3. Tableaux de Karnaugh

▸ Définition

Les tables de Karnaugh (prononcer : karno) sont des représentations graphiques astucieuses qui facilitent grandement l'utilisation pratique des règles de calcul dans une algèbre de Boole, en permettant de visualiser des expressions booléennes. Conformément au programme, on se limitera aux cas de deux et trois variables

▸ Point histoire

Maurice Karnaugh (1924 – 2022,) est un spécialiste de physique et mathématique (algèbre de Boole), il développe son célèbre diagramme en 1954 alors qu'il travaillait aux *Bell Labs*. Il a ensuite travaillé chez *IBM* (1966 – 1989). Il est également co-inventeur des premiers circuits logiques.

▸ Méthodes 2.1

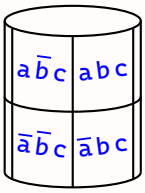
Tableau de Karnaugh à deux variables

	b	$\bar{b}$
a	ab	$a\bar{b}$
$\bar{a}$	$\bar{a}b$	$\bar{a}\bar{b}$

Tableau de Karnaugh à trois variables

	b		$\bar{b}$	
a	abc	$ab\bar{c}$	$a\bar{b}\bar{c}$	$a\bar{b}c$
$\bar{a}$	$\bar{a}bc$	$\bar{a}b\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}c$
	c	$\bar{c}$	$\bar{c}$	c

équivalent à

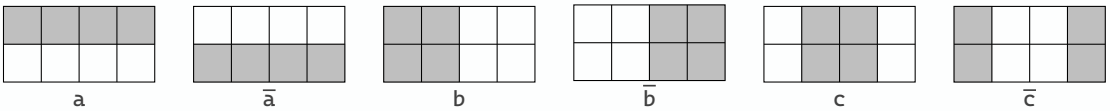


Il faut imaginer le tableau de Karnaugh à trois variables comme un « cylindre », avec les 2 « colonnes **c** qui se touchent ».

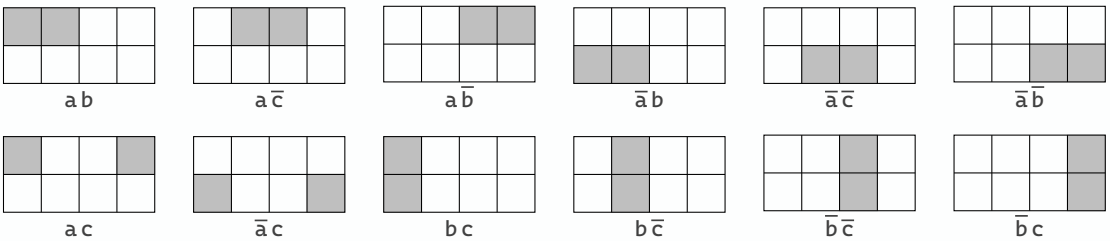
▸ Idée générale

L'idée d'un tableau de Karnaugh est :

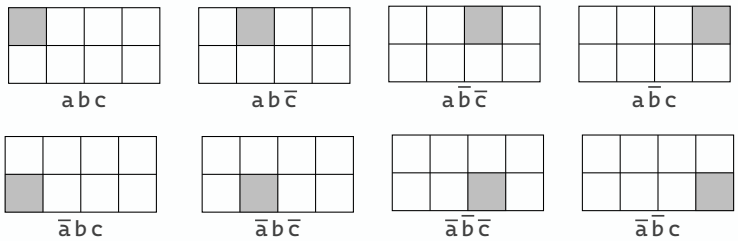
- de « colorier » les cases relatives à une expression booléenne ;
- de « regrouper » les cases coloriées (avec *superposition* possible) en *blocs* :
  - de 4 cases contiguës qui donnent **1** variable ;



  - de 2 cases contigües qui donnent **2** variables ;



  - les « cases isolées » correspondent à **3** variables :



III. Compléments

III.1. Simplification par calculs

▸ Méthode 3.1

Même si le tableau de Karnaugh est plus *pratique* pour simplifier une expression booléenne, il est tout à fait possible de le faire par calculs, en utilisant les propriétés vues en début de chapitre (notamment l'absorption).

▸ Exemple 3.1

On considère $A = h\overline{a} + \overline{s}a + \overline{h}s + \overline{h}\overline{a}$.

$$\begin{aligned} A &= h\overline{a} + \overline{s}a + \overline{h}s + \overline{h}\overline{a} \\ &= \overline{a}(h + \overline{h}) + \overline{s}a + s\overline{h} \\ &= \underbrace{\overline{a} + a\overline{s}} + s\overline{h} \\ &= \overline{a} + \underbrace{\overline{s} + s\overline{h}} \\ &= \overline{a} + \overline{s} + \overline{h}. \end{aligned}$$

III.2. Utilisation des règles de De Morgan

▸ Méthode 3.2

Le tableau de Karnaugh, et notamment les cases non coloriées, permet de déterminer une écriture simplifiée du contraire d'une expression booléenne.
Par calculs, ce sont les règles de De Morgan qui permettent d'effectuer la simplification.

▸ Exemple 3.2

On considère $C = ab(\overline{a} + b + c)$.

$$\begin{aligned} \overline{C} &= \overline{ab\,(\overline{a} + b + c)} \\ &= \overline{a} + \overline{b} + \overline{\overline{a} + b + c} \\ &= \overline{a} + \overline{b} + a\overline{b}\overline{c}. \end{aligned}$$

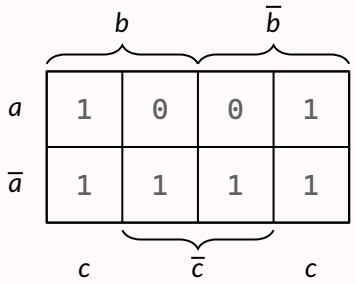
III.3. Présentations alternatives des tables de Karnaugh

▸ Idées 3.1

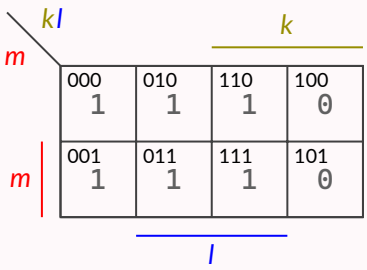
Il existe d'autres présentations des tables de Karnaugh :

- une (binaire) qui contient des 0 et des 1 *au lieu* du coloriage ;
- une qui consiste en une présentation différente des cases.

▸ Illustrations 3.1



$\boxed{\overline{a} + c}$



$\boxed{\overline{k} + l}$