

CHAP
02

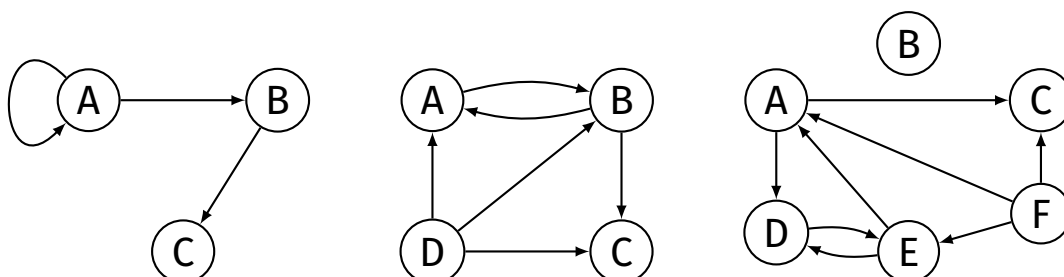
Graphes - Exercices



Exercice 1 (☆☆☆)

Pour les graphes ci-dessous, donner :

1. le tableau de successeurs ;
2. le tableau de prédécesseurs ;
3. la matrice d'adjacence.



Exercice 2 (☆☆☆)

Pour chaque tableau ci-dessous, représenter le graphe associé et donner la matrice d'adjacence du graphe :

1. Graphe 1

Sommet	A	B	C	D	E
Successeurs	A, B	A, C, D	B	E	

2. Graphe 2

Sommet	A	B	C	D	E
Prédécesseurs	A, B	A, C, D	B	E	

3. Graphe 3

Sommet	A	B	C	D	E
Prédécesseurs		A	B	C	D

Exercice 3 (☆☆☆)

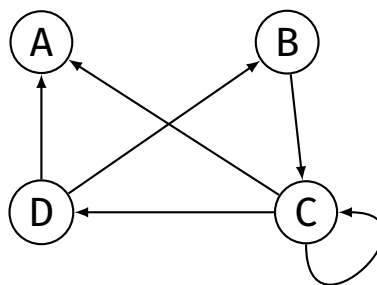
On donne ci-dessous des matrices d'adjacence. Pour chaque matrice, tracer le graphe associé et donner son tableau des successeurs et son tableau des prédécesseurs.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, associée à l'ensemble de sommets $\mathcal{S} = \{A, B, C\}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, associée à l'ensemble de sommets $\mathcal{S} = \{A, B, C, D\}$.

Exercice 4 (☆☆☆)

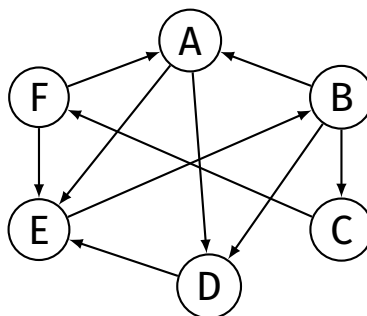
On considère le graphe suivant :



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.
2. Calculer M^3 , et interpréter ses coefficients.
3. Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 reliant C à A? Les donner tous.
4. Entre quels sommets n'existe-t-il pas de chemin de longueur 6?
5. Existe-t-il un chemin hamiltonien dans ce graphe? Si oui, le donner.

Exercice 5 (☆☆☆)

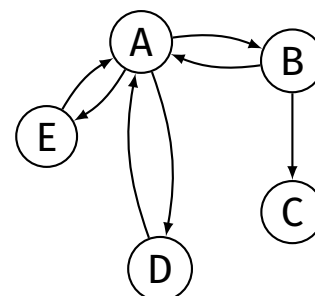
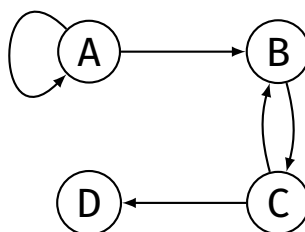
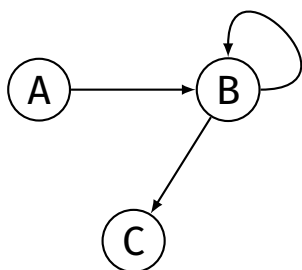
On considère le graphe suivant :



1. Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.
2. Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 partant de B dans ce graphe?
3. Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 dans le graphe?
4. Déterminer un chemin de longueur minimal allant de A à F.
5. Existe-t-il un chemin hamiltonien dans ce graphe? Si oui, le donner.

Exercice 6 (☆☆☆)

Donner la fermeture transitive des graphes ci-dessous. On détaillera le raisonnement.



Exercice 7 (☆☆☆)

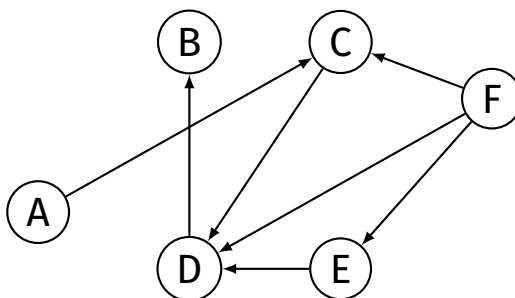
Un graphe est donné par son tableau des prédécesseurs ci-dessous :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Prédécesseurs	B,C	C			A,F	A,D

1. Déterminer le niveau de chacun des sommets du graphe.
2. Représenter le graphe géométriquement, en classant les sommets par niveaux.

Exercice 8 (☆☆☆)

On considère le graphe ci-dessous :



1. Donner le tableau des prédécesseurs du graphe.
2. Déterminer le niveau des sommets du graphe.
3. Représenter le graphe géométriquement, en classant les sommets par niveaux.

Exercice 9 (☆☆☆)

Un administrateur réseau met en place une stratégie logique de maintenance en cinq étapes : A, B, C, D et E. Il a noté dans un tableau la dépendance immédiate des étapes les unes par rapport aux autres, en fonction de la logique d'enchaînement des étapes.

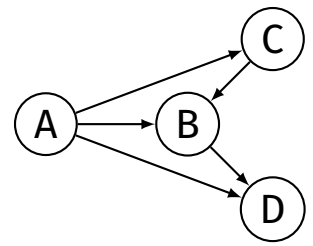
Par exemple, selon lui, il est logique d'enchaîner immédiatement l'étape B après l'étape A, ou de répéter l'étape A si nécessaire, mais il n'est pas logique d'effectuer immédiatement les étapes C, D et E après l'étape A.

Étapes	A	B	C	D	E
Étapes qui peuvent suivre immédiatement	A,B	B,C	D	C	A,D,E

1. Dessiner le graphe orienté G correspondant au tableau ci-dessus.
2. Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe orienté G.
3. Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 d'origine E dans le graphe orienté G ? Justifier.
4. Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 d'extrémité finale C dans le graphe orienté G ?
5. Combien y a-t-il de circuits de longueur 4 dans le graphe ? Justifier.
6. On désigne par $\widehat{M}$ la matrice d'adjacence de la fermeture transitive du graphe orienté G.
 - a. Déterminer $\widehat{M}$.
 - b. Dans la matrice $\widehat{M}$, interpréter la valeur du coefficient de la ligne 1 et colonne 4, et celui de la ligne 1 et colonne 5.

Exercice 10 (☆☆☆)

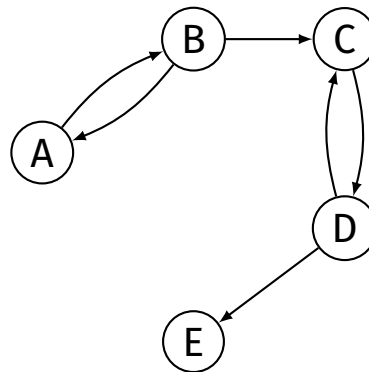
Au cours d'un stage, un étudiant en BTS SIO a développé un jeu pour téléphone portable. Le jeu comprend quatre étapes, notées A, B, C, D. Le joueur commence à l'étape A puis, selon l'indice découvert, passe à une autre étape. Les possibilités de passage d'une étape à l'autre sont données par le graphe orienté G ci-contre, dont les sommets A, B, C, D modélisent les étapes, et les flèches les possibilités de passage d'une étape à une autre.



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe orienté, en considérant les quatre sommets A, B, C, D dans cet ordre.
2. On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - a. Citer tous les chemins de longueur 2.
 - b. Déterminer la matrice M^4 ; cette matrice peut être obtenue à la calculatrice. Interpréter le résultat dans le contexte du jeu.
3. Existe-t-il un chemin hamiltonien ? Si oui, le donner.
4. On note $M^{[n]}$ la n -ième puissance booléenne de la matrice M, et $\oplus$ l'addition booléenne de deux matrices.
 - a. Déterminer la matrice $M' = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus M^{[4]}$.
 - b. Donner la représentation géométrique du graphe G' dont la matrice d'adjacence est la matrice M' .
 - c. Interpréter dans le contexte du jeu la dernière ligne de la matrice M' .

Exercice 11 ... FIL ROUGE DRONE ... (☆☆☆)

Un essaim de 5 drones de reconnaissance, notés A, B, C, D, E, communique par liaisons radio *point-à-point*. Certaines liaisons sont à double sens, d'autres à sens unique (portée ou relief limitant la transmission dans un sens). Le réseau de communication est représenté par le graphe orienté suivant :



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce réseau, en considérant les sommets dans l'ordre A, B, C, D, E.
2. Calculer M^2 , et interpréter le coefficient situé ligne B, colonne D.
3. Déterminer la fermeture transitive $\widehat{M}$ de ce graphe.
4. Le drone E peut-il, directement ou indirectement, transmettre une alerte à chacun des quatre autres drones de l'essaim ? Justifier à l'aide de $\widehat{M}$.
5. Le réseau est-il totalement connecté, c'est-à-dire chaque drone peut-il relayer une alerte vers tous les autres ? Si non, proposer l'ajout d'une unique liaison radio permettant d'y parvenir, et justifier votre choix.