



Exercice 1 (☆☆☆)

Dans une station de sports d'hiver, une étude est réalisée dans le but d'étudier la durée d'attente au pied des remontées mécaniques.

Dans ce problème, on s'intéresse à l'étude de la durée d'attente, exprimée en minutes, au pied d'une remontée mécanique particulière.

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Probabilités conditionnelles

On désigne par A et B les événements suivants :

A : « la durée d'attente lors de la première montée est supérieure ou égale à 3 minutes ».

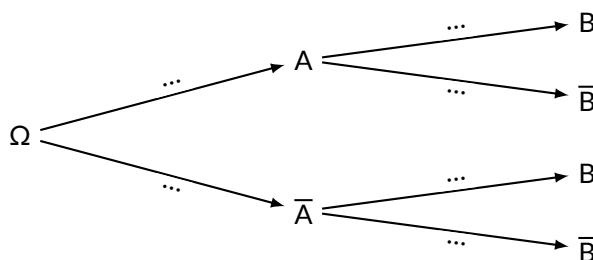
B : « la durée d'attente lors de la deuxième montée est supérieure ou égale à 3 minutes ».

Des observations permettent d'admettre que $P(A) = 0,2$.

On constate que :

- si la durée d'attente lors de la première montée est supérieure ou égale à 3 minutes, la probabilité que la durée d'attente lors de la deuxième montée soit supérieure ou égale à 3 minutes est 0,3 ;
- si la durée d'attente lors de la première montée est strictement inférieure à 3 minutes, la probabilité que la durée d'attente lors de la deuxième montée soit supérieure ou égale à 3 minutes est 0,5.

a. Compléter l'arbre de probabilités suivant :



b. Déterminer $P(B)$ et interpréter le résultat.

2. Loi binomiale

On a relevé, sur une grande journée de vacances scolaires, les durées d'attente des clients d'une chaîne hôtelière à chaque passage, au pied de cette remontée mécanique.

Chaque durée d'attente a été notée sur une fiche. On tire une fiche au hasard dans l'ensemble des fiches.

On considère l'événement E : « la fiche tirée au hasard dans l'ensemble des fiches correspond à une durée d'attente supérieure ou égale à 3 minutes ».

On suppose que la probabilité de l'événement E est 0,4.

On tire au hasard 5 fiches dans l'ensemble des fiches. Le nombre de fiches est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 5 fiches.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 5 fiches associe le nombre de fiches correspondant à une durée d'attente supérieure ou égale à 3 minutes.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b. Calculer la probabilité, arrondie au millième, de chacun des événements suivants :

F : « aucun temps d'attente n'atteint ou ne dépasse 3 minutes » ;

G : « il y a, au plus, un temps d'attente qui égale ou dépasse 3 minutes » ;

H : « il y a, au moins, deux temps d'attente qui égalent ou dépassent trois minutes ».

Exercice 2 (☆☆☆)

Une usine fabrique des pièces dont 1,8 % sont défectueuses.

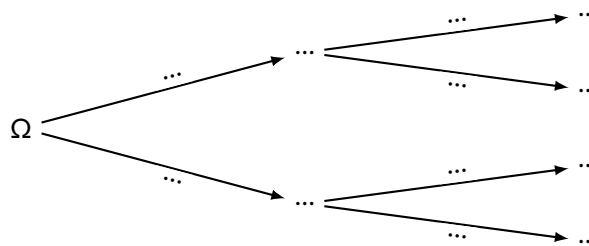
Le contrôle des pièces s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

- sachant qu'une pièce est bonne, on l'accepte avec une probabilité de 0,97 ;
- sachant qu'une pièce est mauvaise, on la refuse avec une probabilité de 0,99.

On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée et on note :

- B : l'événement « la pièce choisie est bonne » ;
- M : l'événement « la pièce choisie est mauvaise » ;
- A : l'événement « la pièce est acceptée au contrôle » ;
- R : l'événement « la pièce est refusée au contrôle ».

1. Compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse ?

3. a. Montrer que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est 0,000 18.

b. Montrer que la probabilité qu'une pièce soit bonne et refusée est 0,029 46.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle.

4. On contrôle cinq pièces de façon indépendante. On note X la variable aléatoire qui à chaque lot de cinq pièces contrôlées associe le nombre d'erreurs de contrôle.

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Déterminer la probabilité qu'il y ait exactement deux erreurs de contrôle. Donner la valeur approchée décimale arrondie à 10^{-3} du résultat.

Exercice 3 (☆☆☆)

À la livraison d'un grand nombre de pièces dont 1 % sont défectueuses, on prélève au hasard un échantillon de 50 pièces.

La population est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de cinquante pièces. On a donc une succession de cinquante épreuves indépendantes. On note X la variable aléatoire qui à, chaque prélèvement de 50 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses de ce prélèvement.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2. Calculer la probabilité (au millième) de chacun des événements suivants :

A : « L'échantillon ne comporte aucune pièce défectueuse » ;

B : « L'échantillon comporte une seule pièce défectueuse » ;

C : « L'échantillon comporte au moins deux pièces défectueuses ».

Exercice 4 (☆☆☆)

Un représentant d'une marque d'automobiles démarché dix clients par jour. On suppose que chaque client lui commande une voiture neuve avec la probabilité $1/20$ et que chaque client prend la décision de commander ou non une voiture neuve en toute indépendance, sans être influencé par le comportement des autres clients.

Tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} .

1. Calculer la probabilité, pour le concessionnaire, de vendre un jour choisi au hasard :
 - a. au moins une voiture ;
 - b. trois voitures exactement.
2. Sachant qu'il touche 200 euros de commission par voiture vendue, calculer la probabilité qu'il gagne au moins 400 euros en une journée.

Exercice 5 ... FIL ROUGE DRONE ... (☆☆☆)

Une entreprise de drones de loisir teste la fiabilité de son module de stabilisation embarqué. Des essais montrent que 3 % des modules produits présentent un défaut de calibration.

On prélève au hasard un lot de 120 modules dans la production. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 120 modules. On a donc une succession de 120 épreuves indépendantes. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout lot de 120 modules le nombre de modules défectueux.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Donner ses paramètres.
2. Déterminer une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Le lot ne contient aucun module défectueux » ;

B : « Le lot contient au plus trois modules défectueux ».
3. On décide d'approcher la loi de X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.
 - a. Déterminer la valeur de λ .
 - b. En notant Z une variable aléatoire suivant cette loi de Poisson, recalculer une valeur approchée de $P(B)$ à l'aide de cette approximation. Le résultat est-il cohérent avec celui obtenu à la question 2. ?

Exercice 6 (☆☆☆)

Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré qu'il y avait 5 % de bons de commande comportant au moins une erreur. On constitue au hasard un échantillon de 100 bons de commande parmi ceux traités un jour donné.

Le nombre de bons de commande traités dans cette journée est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 bons de commande. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de 100 bons le nombre de bons erronés. On admet que $X \sim \mathcal{P}_5$.

1. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - a. E_1 : « il y a exactement 5 bons erronés parmi les 100 » ;
 - b. E_2 : « il y a moins de 5 bons erronés parmi les 100 » ;
 - c. E_3 : « il y a au moins 5 bons erronés parmi les 100 ».
2. Déterminer le plus petit entier k tel que la probabilité d'avoir moins de k erreurs soit supérieure à 0,9.

Exercice 7 (☆☆☆)

Dans cet exercice, chaque probabilité demandée est à arrondir au millième.

Une entreprise emploie 20 personnes. Une étude statistique permet d'admettre qu'un jour donné la probabilité qu'un employé donné soit absent est 0,05. On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres.

On note X la variable aléatoire qui à chaque jour tiré au hasard associe le nombre d'employés absents.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - a. E_1 : « un jour donné il y a exactement trois absents » ;
 - b. E_2 : « un jour donné il y a strictement plus de deux absents » ;

c. E_3 : « un jour donné le nombre d'absents est compris entre 3 et 6, bornes comprises ».

3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X . Que représente $E(X)$?

4. On approche la loi binomiale du 1. par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ où n et p sont les paramètres de cette loi binomiale. On désigne par Z une variable aléatoire suivant cette loi de Poisson.

En utilisant la loi de Poisson, déterminer les probabilités des événements E_1, E_2, E_3 de la question 2. .

Exercice 8 (☆☆☆)

Une entreprise fabrique en grand nombre des tiges en plastique de longueur théorique 100 mm.

Dans un lot de tiges de ce type, 2 % des tiges n'ont pas une longueur conforme. On prélève au hasard n tiges de ce lot pour vérification de longueur. Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de n tiges.

On considère la variable aléatoire Y qui, à chaque prélèvement de n tiges, associe le nombre de tiges de longueur non conforme de ce prélèvement.

1. Pour cette question on prend $n = 50$.

a. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b. Calculer $P(Y = 3)$.

2. Dans cette question, on prend $n = 100$. La variable aléatoire Y suit une loi binomiale que l'on décide d'approcher par une loi de Poisson.

a. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b. On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ est le paramètre obtenu à la question 2.a. À l'aide de l'approximation de Y par Z , calculer la probabilité d'avoir au plus 4 tiges de longueur non conforme.

Exercice 9 (☆☆☆)

Une compagnie bancaire dont la clientèle est très nombreuse propose des placements financiers à ses clients. L'objet de cet exercice est d'étudier un placement de type A.

Tous les résultats numériques seront arrondis à 10^{-3} .

La banque constate que le produit de type A intéresse 10 % de sa clientèle.

1. Un sondage est effectué auprès d'un échantillon aléatoire de 10 clients de la banque.

Le nombre de clients est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler tout échantillon de 10 clients à un échantillon non exhaustif (c'est-à-dire effectué avec remise).

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe le nombre de clients qui ont choisi le produit A.

a. Préciser la loi suivie par X . Justifier et donner les paramètres de la loi.

b. Calculer la probabilité qu'au moins 2 clients de l'échantillon aient choisi le produit A.

2. Un sondage est maintenant effectué auprès d'un échantillon de 30 clients de la banque.

Le nombre de clients est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler tout échantillon de 30 clients à un échantillon non exhaustif de 30 clients.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe le nombre de clients qui ont choisi le produit A.

a. Préciser la loi de Y . Calculer l'espérance mathématique de Y . Que représente $E(Y)$?

b. On approche la loi de Y par une loi de Poisson. Préciser le paramètre de cette loi.

c. En utilisant cette approximation, calculer la probabilité qu'au moins deux clients de l'échantillon aient choisi le produit A.

Exercice 10 ... FIL ROUGE DRONE ... (☆☆☆)

Une flotte de drones de surveillance communique en temps réel avec une station de contrôle au sol via une liaison radio de télémétrie. La qualité de cette liaison dépend de la zone survolée.

On admet que, sur une mission donnée, un drone survole une zone urbaine avec une probabilité de 0,3 (et une zone rurale sinon).

On désigne par Z et L les événements suivants :

Z : « le drone survole une zone urbaine » ;

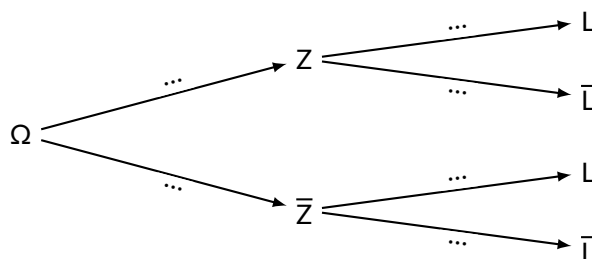
L : « le drone subit une perte du signal de télémétrie pendant plus de 5 secondes ».

Des observations permettent d'admettre que :

- en zone urbaine, la probabilité qu'un drone subisse une perte de signal est 0,15 ;
- en zone rurale, cette probabilité est de 0,04.

1. Probabilités conditionnelles

- a. Compléter l'arbre de probabilités suivant :



- b. En déduire que $P(L) = 0,073$.
- c. Sachant qu'un drone a subi une perte de signal, déterminer la probabilité qu'il survolait une zone urbaine. Arrondir à 10^{-3} .

2. Loi binomiale

On considère une mission impliquant 25 drones, dont les comportements sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de drones ayant subi une perte de signal parmi les 25, en admettant pour chaque drone la probabilité $P(L) = 0,073$ obtenue précédemment.

- a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
- b. Calculer, arrondies à 10^{-3} , les probabilités des événements suivants :
- A : « aucun drone ne subit de perte de signal » ;
- B : « au moins deux drones subissent une perte de signal ».

3. Approximation par la loi de Poisson

On considère à présent une opération de reconnaissance à grande échelle impliquant 200 drones. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de drones ayant subi une perte de signal parmi les 200.

- a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres, puis calculer $\mathbb{E}(Y)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de la mission.
- b. On approche la loi de Y par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$. Déterminer λ .
- c. On note W une variable aléatoire suivant cette loi de Poisson. Déterminer le plus petit entier k tel que $P(W < k) > 0,95$. Interpréter ce résultat pour le responsable de la mission.