– Second Degré – Théorème de factorisation

De la forme développée à la forme factorisée

Obtention de la forme canonique (Partie 1)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On commence par factoriser par a les termes en x :

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c$$

Obtention de la forme canonique (Partie 1)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On commence par factoriser par a les termes en x :

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c$$

On reconnaît dans $x^2 + \frac{b}{a}x$ le début du développement d'une identité remarquable :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

Obtention de la forme canonique (Partie 1)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On commence par factoriser par a les termes en x :

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c$$

On reconnaît dans $x^2 + \frac{b}{a}x$ le début du développement d'une identité remarquable :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

On isole le terme recherché (complétion du carré) :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

Obtention de la forme canonique (Partie 2)

En injectant cette expression dans $f(x)$:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

Obtention de la forme canonique (Partie 2)

En injectant cette expression dans $f(x)$:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

On distribue le facteur a uniquement sur la constante de fin pour tout mettre au même dénominateur :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{a \times b^2}{4a^2} + c$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

Obtention de la forme canonique (Partie 2)

En injectant cette expression dans $f(x)$:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

On distribue le facteur a uniquement sur la constante de fin pour tout mettre au même dénominateur :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{a \times b^2}{4a^2} + c$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

En remettant sous le crochet factorisé par a, on obtient la forme :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Introduction du Discriminant

Pour simplifier la forme obtenue :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

On pose le **discriminant** :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

On obtient donc la forme *simplifiée* :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Étude selon le signe de Δ

La factorisation dépend entièrement du signe de Δ car nous devons analyser l'expression :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$$

Trois cas se présentent :

- **Cas 1 :** $\Delta < 0$
- **Cas 2 :** $\Delta = 0$
- **Cas 3 :** $\Delta > 0$

Cas 1 : $\Delta < 0$

Si $\Delta < 0$, alors $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$.

L'expression dans le crochet est la somme :

- d'un carré $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$
- et d'un nombre strictement positif $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$

Conclusion

Le crochet est strictement positif et ne s'annule jamais dans $\mathbb{R}$.
Pas de factorisation possible dans $\mathbb{R}$.

Cas 2 : $\Delta = 0$

Si $\Delta = 0$, la forme canonique se simplifie immédiatement :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{0}{4a^2}\right]$$

Cas 2 : $\Delta = 0$

Si $\Delta = 0$, la forme canonique se simplifie immédiatement :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{0}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

On définit la racine double : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Forme factorisée ($\Delta = 0$)

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

Cas 3 : $\Delta > 0$ (Partie 1)

Si $\Delta > 0$, alors $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$. On peut réécrire le crochet :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

Cas 3 : $\Delta > 0$ (Partie 1)

Si $\Delta > 0$, alors $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$. On peut réécrire le crochet :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

On reconnaît l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ avec :

$$A = x + \frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad B = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Cas 3 : $\Delta > 0$ (Partie 2)

En appliquant l'identité remarquable :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]$$

Cas 3 : $\Delta > 0$ (Partie 2)

En appliquant l'identité remarquable :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]$$

En regroupant les fractions :

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Cas 3 : $\Delta > 0$ (Partie 2)

En appliquant l'identité remarquable :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]$$

En regroupant les fractions :

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

En posant $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$:

Forme factorisée ($\Delta > 0$)

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Résumé des formes factorisées

Signe de Δ	**Nombre de racines**	**Forme factorisée**
$\Delta < 0$	0	Pas de factorisation
$\Delta = 0$	1 (double)	$a(x - x_0)^2$
$\Delta > 0$	2 distinctes	$a(x - x_1)(x - x_2)$