

► Compétences

- ✓ Reconnaître une fonction polynôme du second degré et ses coefficients
- ✓ Déterminer les racines et la forme factorisée d'un trinôme
- ✓ Utiliser la somme et le produit des racines
- ✓ Déterminer le discriminant et la forme canonique
- ✓ Résoudre une équation du second degré



I. Différentes formes d'écriture

I.1. Forme développée réduite

► Définition 1.1

On appelle **polynôme du second degré** ou **trinôme** une expression de la forme

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a, b, c \text{ des réels fixés tels que } a \neq 0$$

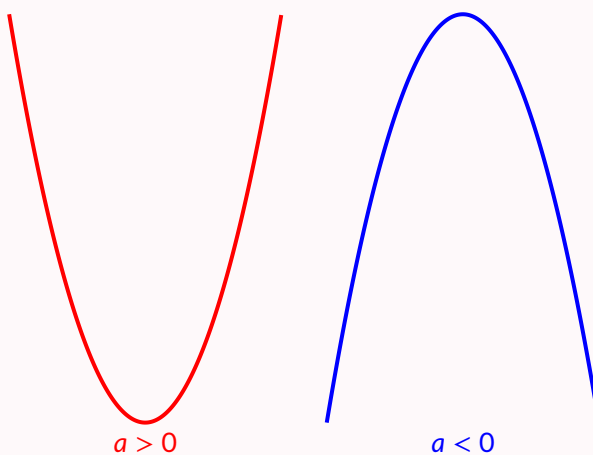
ou toute autre expression qui peut se mettre sous cette forme, qu'on appelle **forme développée réduite**.
Les nombres a, b, c sont les **coefficients** du polynôme.

► Remarque 1.1

Polynôme signifie *plusieurs monômes*. Un monôme désigne une expression de la forme ax^n , où $a \in \mathbb{R}$ est le **coefficient** du monôme, et $n \in \mathbb{N}$ est son **degré**.

► Propriété 1.1

La courbe représentative d'une telle fonction est toujours une **parabole**. Elle est « **ouverte vers le haut** » (« souriante ») si a est positif, elle est « **ouverte vers le bas** » si a est négatif.

► Illustration 1.1

I.2. Forme canonique

► Définition 1.2

La **forme canonique** d'un tel polynôme est celle qui s'écrit en utilisant une seule fois la lettre x , et qui permet de trouver facilement le **programme de calcul** de la fonction.

Elle est toujours de la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

► Propriété 1.2

Dans la forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, a est le coefficient de plus haut degré (le même que celui de la forme développée), et α et β sont les **coordonnées du sommet** de la parabole qui représente f .

► Démonstration 1.1

- Le point $S(\alpha ; \beta)$ est bien un point de la parabole car $f(\alpha) = a \times 0 + \beta = \beta$.
- Comme $(x - \alpha)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

si $a > 0$	si $a < 0$
$a(x - \alpha)^2 \geq 0$	$a(x - \alpha)^2 \leq 0$
$a(x - \alpha)^2 + \beta \geq \beta$	$a(x - \alpha)^2 + \beta \leq \beta$
$f(x) \geq \beta$	$f(x) \leq \beta$
β est le minimum de f	β est le maximum de f

► Propriété 1.3

Une parabole est **symétrique** par rapport à la verticale passant par son sommet.

I.3. Forme factorisée

► Définition 1.3

Dans certains cas, un polynôme du second degré *peut* aussi s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

où a est le coefficient de plus haut degré (le même que celui de la forme développée), et x_1 et x_2 sont les **racines** du polynôme.

Cette écriture s'appelle la **forme factorisée** du polynôme.

► Propriété 1.4

Les **racines** du polynôme sont les valeurs qui annulent le polynôme.

Ce sont les abscisses des **points d'intersection** de la parabole avec l'axe des abscisses.

► Point histoire



Mohammed Al-Khwarizmi (780 – 850, ) est le premier des mathématiciens persans, et sans doute le plus connu. Il vit à Bagdad du temps de la splendeur de la dynastie abbasside. Le plus célèbre de ses écrits, *Kitâb al-jabr wa al-muqâbala* fut traduit en latin au XII^e siècle, sous le titre *Algebra*. Traitant de la résolution des équations du second degré, il est considéré comme le premier manuel d'algèbre.

II. Discriminant et racines

II.1. Mise sous forme canonique

► Propriété 2.1

Dans la forme canonique, α et β se déterminent grâce aux formules suivantes :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

► Démonstration 2.1

$$\text{On a } f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

On retrouve bien la formule donnée pour α et on a vu plus haut déjà que $f(\alpha) = \beta$.

► Algorithmme 2.1

En , on peut créer une  permettant de calculer les valeurs de α et de β :

```
</> Code Python
1 # Calcul de alpha et de beta
2 from math import *
3
4 def formecanonique(a, b, c) :
5     alpha = -b / (2*a)
6     beta = a * alpha**2 + b * alpha + c
7     return alpha, beta
```

✚ Début de la console Python ✚

```
>>> formecanonique(-3, -5, 2)
(-0.8333333333333334, 4.0833333333333334)
```

✚ Fin de la console Python ✚

II.2. Discriminant

► Définition 2.1

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

On appelle **discriminant** et on note Δ le nombre

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c.$$

► Propriété 2.2

Le polynôme ne peut être factorisé que si Δ est positif.

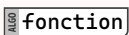
► Démonstration 2.2

Dans la forme canonique, avec les formules ci-dessus, on a :

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

- Lorsque Δ est positif, on voit apparaître dans les crochets une différence de deux carrés, que l'on sait factoriser à l'aide de l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$;
- Quand Δ est négatif, on y retrouve une somme de deux nombres positifs.

► Algorithmme 2.2

En , on peut créer une  permettant de calculer la valeur de Δ :

```
</> Code Python
1 # Calcul de delta
2 from math import *
3
4 def delta(a, b, c) :
5     delta = b**2 - 4*a*c
6     return delta
```

✚ Début de la console Python ✚

```
>>> delta(-3, -5, 2)
49
```

✚ Fin de la console Python ✚

II.3. Calcul des racines

► Théorème 2.1

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme n'a **pas de racine réelle**. Il ne se factorise pas.
- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme a **une seule racine**, appelée **racine double**. Elle est égale à $\alpha = \frac{-b}{2a}$.
La forme canonique est également la forme factorisée.
- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme a **deux racines réelles** x_1 et x_2 que l'on calcule grâce aux formules

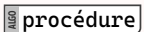
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

► Démonstration 2.3

On a $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] = a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$.

Il suffit de résoudre l'équation $f(x) = 0$ pour trouver les racines de f .

► Algorithme 2.3

En , on peut créer une  permettant de calculer les éventuelles racines :

```
</> Code Python
1 # Calcul des éventuelles racines
2 from math import *
3
4 def racines(a, b, c) :
5     # Calcul de Delta avec la fonction précédente
6     d = delta(a, b, c)
7     print(f"Delta={d}")
8     if d < 0 :
9         print("Aucune racine")
10    elif d == 0 :
11        print(f"Une racine, {-b / (2*a)}")
12    else :
13        print(f"Deux racines, {(-b + sqrt(d)) / (2*a)} et {(-b - sqrt(d)) / (2*a)}")
```

```
♣ Début de la console Python ♣

>>> racines(-3, -5, 2)
Delta=49
Deux racines, -2.0 et 0.3333333333333333
>>> racines(1, 1, 1)
Delta=-3
Aucune racine
>>> racines(1, -2, 1)
Delta=0
Une racine, 1.0

♣ Fin de la console Python ♣
```

II.4. Résolution d'équations de degré 2

► Idée

Jusqu'à maintenant, pour résoudre une équation de degré 2, le seul outil dont on disposait était la « règle du produit nul » : un produit de facteurs est nul ssi l'un au moins des facteurs est nul.

Pour cela, il fallait donc se ramener à quelque chose de *nul* en passant tout dans un seul membre de l'équation, puis à un *produit* en factorisant, ce qui n'était pas toujours possible.

Nous avons désormais la possibilité d'utiliser les formules discriminant/racines au lieu de factoriser, à **condition** tout de même d'avoir une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$.

► Point histoire

Les équations du second degré sont au centre de l'algèbre **babylonienne**, dès avant le XVIII^e siècle avant JC. La tablette d'argile BM 1390 a été qualifiée de « véritable petit manuel d'algèbre, consacré à l'équation du second degré et aux systèmes d'équations, et donnant les procédures résolutoires fondamentales ».

Au VIII^e siècle, le mathématicien indien *Sridhar Acharya* indique la manière de calculer les deux racines réelles.

Les équations du second degré ont été étudiées systématiquement par *Al-Khwarizmi*.

► Méthode 2.1

Pour résoudre une équation du second degré (c'est-à-dire « avec des x^2 »), on peut :

- développer ;
- tout passer dans le même membre pour avoir $\dots = 0$;
- calculer Δ et les éventuelles racines ;
- conclure en donnant l'ensemble des solutions (suivant les cas, $\emptyset$, $\{\alpha\}$ ou $\{x_1 ; x_2\}$).

II.5. Somme et produit des racines

► Propriété 2.3

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ayant deux racines x_1 et x_2 . Alors :

- la somme des racines est égale à $-\frac{b}{a}$;
- le produit des racines est égal à $\frac{c}{a}$.

► Démonstration 2.4

Il suffit de calculer $x_1 + x_2$ et $x_1 \times x_2$ avec les formules des racines !

► Remarques 2.1

- On a donc $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = \alpha$, autrement dit la moyenne des racines est égale à α .
On retrouve ici l'idée de symétrie de la parabole, par rapport à la verticale passant par son sommet. C'est une façon de déterminer α (et donc la forme canonique) directement à partir de la forme factorisée, sans passer par l'étape développée.
- Ces propriétés sont intéressantes lorsque l'une des deux racines est une *racine évidente*, c'est-à-dire une racine que l'on peut voir (souvent un petit nombre entier). On utilise alors la formule de la somme ou du produit pour déterminer la deuxième racine sans avoir à calculer Δ (mais dans tous les cas, on peut aussi déterminer les racines avec la méthode habituelle).