CHAP 02 Probas conditionnelles et indépendance - Exercices

Niveaux de difficulté

Basique | Modérée | Élevée | Très élevée | Extrême | Insensée

Exercice 1

On lance un dé équilibré à six faces et on note le numéro de la face obtenue.
On considère les événements A : « le résultat est pair » et B : « le résultat est un multiple de 3 ».

1. Décrire par une phrase l'événement $\overline{A}$, puis donner la liste des issues de $\overline{A}$, de $A \cap B$ et de $A \cup B$.
2. Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(A \cap B)$.
3. En utilisant la formule de la réunion, calculer $p(A \cup B)$. Vérifier en dénombrant les issues de $A \cup B$.
4. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Justifier.

Exercice 2

Dans une médiathèque, on choisit un visiteur au hasard. On note A l'événement « le visiteur est adhérent » et E l'événement « le visiteur emprunte un livre ».
Associer chacune des phrases suivantes à la probabilité correspondante parmi $p(A)$, $p(E)$, $p(A \cap E)$, $p_A(E)$ et $p_E(A)$:

1. 30 % des visiteurs sont adhérents ;
2. 80 % des adhérents empruntent un livre ;
3. 24 % des visiteurs sont adhérents et empruntent un livre ;
4. parmi les visiteurs qui empruntent un livre, 60 % sont adhérents ;
5. 40 % des visiteurs empruntent un livre.

Vérifier ensuite la cohérence de ces données en retrouvant $p(A \cap E)$ à partir de $p(A)$ et $p_A(E)$, puis $p_E(A)$ à partir de $p(A \cap E)$ et $p(E)$.

Exercice 3

Dans un lycée, on a interrogé 240 élèves de première sur leur régime à la cantine. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

	Filles	Garçons	Total
Demi-pensionnaire	96	84	
Externe	24	36	
Total			

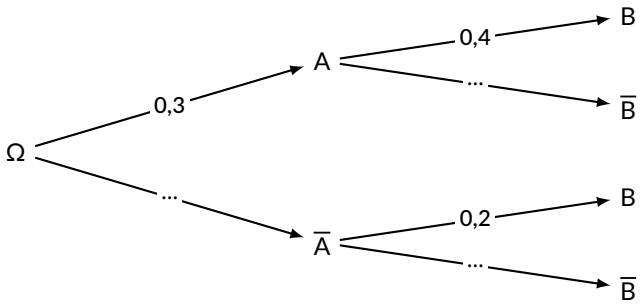
On choisit au hasard un élève parmi ces 240 élèves. On note F l'événement « l'élève est une fille » et D l'événement « l'élève est demi-pensionnaire ».

1. Compléter le tableau.
2. Calculer $p(F)$, $p(D)$ et $p(F \cap D)$.
3. Calculer $p_F(D)$ et interpréter ce résultat par une phrase.
4. Calculer $p_D(F)$ et interpréter ce résultat par une phrase. Pourquoi ce résultat est-il différent de $p_F(D)$?
5. Vérifier que $p(F \cap D) = p(F) \times p_F(D)$.

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 4

On considère deux événements A et B d'une même expérience aléatoire, représentés par l'arbre pondéré incomplet suivant :



1. Recopier et compléter l'arbre.
2. Donner $p_A(B)$ et $p_{\overline{A}}(\overline{B})$.
3. Calculer $p(A \cap B)$ et $p(\overline{A} \cap B)$.
4. En déduire $p(B)$.
5. Calculer $p_B(A)$ (arrondir au centième).

Exercice 5

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules noires, indiscernables au toucher. On tire successivement et **sans remise** deux boules de l'urne.
Pour $i \in \{1 ; 2\}$, on note R_i l'événement « la i-ème boule tirée est rouge ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges.
3. Montrer que $p(R_2) = \frac{2}{5}$.
4. Calculer $p_{R_2}(R_1)$.
5. Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ? Justifier.
6. Que se passerait-il si le tirage se faisait **avec remise** ?

Exercice 6 ••• EN ROUTE VERS LES AUTOMATISMES •••

1. On donne $p(A) = 0{,}4$, $p(B) = 0{,}5$ et $p(A \cap B) = 0{,}2$. Alors $p_A(B)$ est égal à :

☐ 0,2	☐ 0,5	☐ 0,4	☐ 0,8

2. On sait que $p_A(B) = 0{,}3$. Alors $p_A(\overline{B})$ est égal à :

☐ 0,3	☐ 0,07
☐ 0,7	☐ on ne peut pas savoir

3. On donne $p(A) = 0{,}5$, $p_A(B) = 0{,}4$ et $p_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$. Alors $p(B)$ est égal à :

☐ 0,2	☐ 0,3	☐ 0,6	☐ 0,08

4. On donne $p(A) = 0{,}5$, $p(B) = 0{,}2$ et $p(A \cap B) = 0{,}1$. Alors :

☐ A et B sont indépendants	☐ $p_A(B) = 0{,}1$
☐ A et B sont incompatibles	☐ $p(A \cup B) = 0{,}7$

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 7

Une maladie touche 1 % d'une population. On dispose d'un test de dépistage de cette maladie, avec les caractéristiques suivantes :

- le test est positif pour 95 % des personnes malades ;
- le test est positif pour 5 % des personnes non malades (« faux positifs »).

On choisit une personne au hasard dans la population, et on note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $p(M \cap T)$, puis montrer que $p(T) = 0{,}059$.
3. Calculer $p_T(M)$ (arrondir au centième). Que peut-on en conclure sur la fiabilité d'un test positif ?
4. On considère un échantillon de 10 000 personnes. Compléter le tableau d'effectifs et retrouver le résultat de la question précédente.

	Malades	Non malades	Total
Test positif			
Test négatif			
Total			10 000

Exercice 8

Dans chacun des deux cas, on choisit un élève au hasard. On note F l'événement « l'élève est une fille » et S l'événement « l'élève pratique un sport ».

1. Dans un premier lycée, on a 200 élèves dont 120 filles. 100 élèves pratiquent un sport, dont 60 filles.
   Les événements F et S sont-ils indépendants ?
2. Dans un second lycée, on a 150 élèves dont 90 filles. 60 élèves pratiquent un sport, dont 30 filles.
   Les événements F et S sont-ils indépendants ? Si non, comparer $p_F(S)$ et $p(S)$.

Exercice 9

Les questions suivantes sont *indépendantes*.

1. Soient A et B deux événements **indépendants** tels que $p(A) = 0{,}4$ et $p(B) = 0{,}3$.
   a. Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.
   b. Calculer $p(\overline{A} \cap B)$ et vérifier que $\overline{A}$ et B sont indépendants.
   c. Calculer $p(\overline{A} \cap \overline{B})$.
2. Soient C et D deux événements **incompatibles** tels que $p(C) = 0{,}2$ et $p(D) = 0{,}5$.
   Peuvent-ils être indépendants ? Justifier.

Exercice 10

Un basketteur réussit chaque lancer franc avec une probabilité de 0,8, indépendamment des lancers précédents. Il effectue deux lancers francs successifs.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité qu'il réussisse les deux lancers.
3. Calculer la probabilité qu'il réussisse exactement un lancer.
4. Calculer la probabilité qu'il ne réussisse aucun lancer. Vérifier que la somme des trois probabilités obtenues est égale à 1.

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 11

Un contrôle comporte trois questions de type QCM. Chaque question propose quatre réponses, dont une seule est exacte. Un élève répond **au hasard** à chacune des trois questions, de façon indépendante.
On note S l'événement « l'élève donne la bonne réponse à une question ».

1. Justifier que chaque question est une épreuve de Bernoulli dont on précisera la probabilité de succès p.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré à trois niveaux.
3. Calculer la probabilité que l'élève réponde correctement aux trois questions.
4. Calculer la probabilité que l'élève réponde correctement à exactement une question.
5. Calculer la probabilité que l'élève réponde correctement à au moins une question.

Exercice 12

Dans une usine, 10 % des pièces produites sont défectueuses. On prélève successivement quatre pièces, et on assimile ce prélèvement à une répétition de quatre épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques.

1. Quelle est la probabilité de succès p, si l'on appelle « succès » l'événement « la pièce est défectueuse » ?
2. Calculer la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse.
3. En déduire la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse (arrondir au millième).
4. Combien de chemins de l'arbre à quatre niveaux correspondent à « exactement une pièce défectueuse » ? En déduire la probabilité de cet événement.

Exercice 13 ··· UN PEU DE PYTHON ···

Un tireur atteint sa cible avec une probabilité p à chaque tir. On souhaite estimer, par simulation, la probabilité qu'il atteigne sa cible **exactement deux fois** lors de trois tirs successifs indépendants.
Compléter les `fonctions` suivantes, en python, qui vérifient :

- `succes(p)` renvoie `True` avec la probabilité `p` et `False` sinon ;
- `exactement_deux(p)` simule trois tirs et renvoie `True` si la cible est atteinte exactement deux fois ;
- `frequence(n, p)` répète `n` fois cette simulation et renvoie la fréquence des réalisations de l'événement.

Code Python

```
from random import *

def succes(p):
    return random() ......

def exactement_deux(p):
    nb = 0
    for i in range(3):
        if ...... :
            nb = nb + 1
    return nb ......

def frequence(n, p):
    compteur = 0
    for i in range(n):
        if ...... :
            compteur = compteur + 1
    return ......
```

Avec $p = 0{,}7$, on obtient par exemple :

```
Début de la console Python
>>> frequence(100000, 0.7)
0.44173
Fin de la console Python
```

Comparer avec la valeur théorique obtenue à l'aide d'un arbre pondéré à trois niveaux.

Exercice 14

En vue de sa prochaine brochure d'information sur les dangers des Réseaux Sociaux, un lycée a fait remplir un questionnaire à chacun des 2 000 élèves, répartis dans les sections de seconde, première et terminale. On obtient :

- un quart des élèves est en terminale ;
- 35 % des élèves sont en première ;
- tous les autres sont en seconde ;
- parmi les élèves de terminale, 70 % utilisent régulièrement les Réseaux Sociaux ;
- 630 élèves sont des élèves de première qui utilisent régulièrement les Réseaux Sociaux ;
- 1 740 élèves utilisent régulièrement les Réseaux Sociaux.

Cette enquête permet de modéliser le choix d'un élève du lycée. On choisit au hasard un questionnaire d'élève en supposant que ce choix se fait en situation d'équiprobabilité. On note :

- S l'événement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de seconde » ;
- E l'événement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de première » ;
- T l'événement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de terminale » ;
- R l'événement « le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement les Réseaux Sociaux (RS) ».

1. Compléter le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Seconde	Première	Terminale	Total
Utilise régulièrement les RS		630		
N'utilise pas régulièrement les RS				
Total				2 000

2. Déterminer la probabilité d'obtenir le questionnaire d'un élève de seconde qui utilise régulièrement les RS.
3. Calculer la probabilité de R sachant T, notée $p_T(R)$, et interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
4. Calculer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un élève qui n'utilise pas les RS.
5. Le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement les RS. Montrer que la probabilité que ce soit le questionnaire d'un élève de première est égale à $\frac{21}{58}$.

Exercice 15

Une entreprise financière est divisée en deux secteurs ; 65 % de son personnel travaille dans le secteur A et 35 % dans le secteur B. Cette entreprise s'intéresse au niveau de stress de son personnel.
Une enquête, menée sous la forme d'un questionnaire informatisé, est réalisée au sein de l'entreprise. Le questionnaire est proposé de manière anonyme aux salariés des deux secteurs. Cette enquête révèle que pour le secteur A, 20 % du personnel se dit stressé, tandis que, dans le secteur B, ce taux est de 30 %.
On choisit au hasard le questionnaire d'un employé de l'entreprise, chacun ayant la même probabilité d'être choisi. On note :

- A : « le questionnaire est celui d'un employé du secteur A » ;
- B : « le questionnaire est celui d'un employé du secteur B » ;
- S : « le questionnaire est celui d'un employé stressé ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un employé qui travaille dans le secteur B et qui est stressé.
3. L'entreprise examine l'opportunité d'installer une salle de relaxation. Si le taux d'employés stressés est strictement supérieur à 25 %, cette salle sera installée.
   L'entreprise implantera-t-elle la salle de relaxation ? Justifier la réponse.
4. Sachant que le questionnaire choisi est celui d'un employé stressé, quelle est la probabilité qu'il travaille dans le secteur A ? (le résultat sera arrondi à 10^{-2})

Licence Ouverte Etalab 2.0

Exercice 16

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert :

- un assortiment de macarons, choisi par 50 % des clients ;
- une part de tarte tatin, choisie par 30 % des clients.

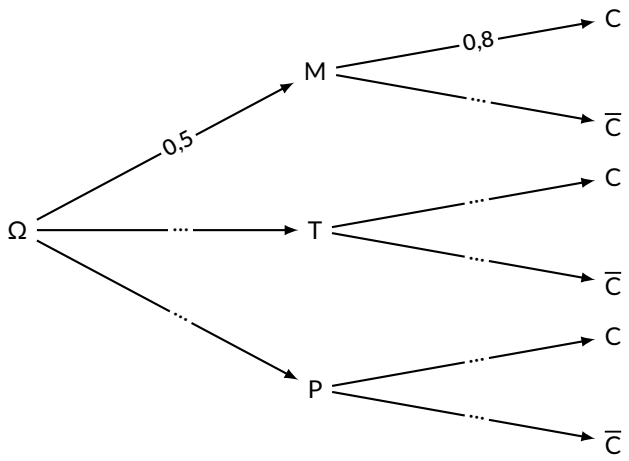
20 % des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts. Le restaurateur constate :

- que parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- que parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café ;
- que parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note :

- M l'événement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T l'événement : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P l'événement : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C l'événement : « Le client prend un café » et $\overline{C}$ l'événement contraire de C.

1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser la valeur de $p(T)$ et celle de $p_T(C)$.
2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



3. a. Exprimer par une phrase ce que représente l'événement $M \cap C$ puis calculer $p(M \cap C)$.
   b. Montrer que $p(C) = 0{,}76$.
4. Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ?

Exercice 17

Un nouveau bachelier souhaitant souscrire un prêt automobile pour l'achat de sa première voiture a le choix entre les trois agences bancaires de sa ville : agence A, agence B et agence C. Après vérification, on a constaté que :

- 20 % des prêts sont souscrits dans l'agence A ;
- 45 % des prêts sont souscrits dans l'agence B ;
- les autres prêts sont souscrits dans l'agence C.

On suppose que tous les clients souscrivent à une assurance dans l'agence où le prêt est souscrit. Deux types de contrats sont proposés : le contrat tout risque, dit *Zen*, et le contrat appelé *Speed*.

- 80 % des clients de l'agence A ayant souscrit un prêt automobile souscrivent une assurance *Zen*.
- 30 % des clients de l'agence B ayant souscrit un prêt automobile souscrivent une assurance *Zen*.
- $\frac{2}{7}$ des clients de l'agence C ayant souscrit un prêt automobile souscrivent une assurance *Speed*.

On interroge au hasard un client d'une de ces trois banques ayant souscrit un contrat d'assurance automobile. On considère les événements A, B et C : « le prêt a été souscrit dans l'agence A (respectivement B, C) », Z : « le contrat d'assurance *Zen* a été souscrit » et S : « le contrat d'assurance *Speed* a été souscrit ».

Licence Ouverte Etalab 2.0

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité que le client interrogé ait souscrit un prêt automobile avec une assurance *Zen* dans l'agence A.
3. Justifier que A, B et C forment une partition de l'univers, puis vérifier que la probabilité de l'événement Z est égale à 0,545.
4. Le client a souscrit une assurance *Zen*. Déterminer la probabilité que le prêt soit souscrit dans l'agence C (arrondir au centième).

Exercice 18



Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1 kg et de différentes qualités. Le sucre extra fin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extra fin ».

Les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

On sait que 3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extra fin et 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extra fin. On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.

On considère les événements suivants :

— U : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U » ;

— V : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V » ;

— E : « Le paquet porte le label « extra fin » ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V, sans mélanger les sucres des deux exploitations.
   a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
   b. Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » ?
   c. Sachant qu'un paquet porte le label « extra fin », quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?
2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que, parmi les paquets portant le label « extra fin », 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U. On cherche à déterminer comment elle doit s'approvisionner auprès des exploitations U et V.

   On ne connaît donc pas, dans cette question, $p(\text{U})$, et on va noter $p(\text{U}) = x$.
   a. Construire, à l'aide de x, un arbre pondéré représentant la situation.
   b. Déterminer, en détaillant la démarche, les valeurs de $p(\text{U})$ et de $p(\text{V})$.



P. Geluck, Le Chat