CHAP 02 Probabilités conditionnelles et indépendance

▸ Compétences

- Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée
- Utiliser un arbre pondéré ou un tableau pour calculer une probabilité
- Calculer une probabilité conditionnelle et distinguer $p_A(B)$ et $p_B(A)$
- Calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales
- Savoir utiliser ou justifier l'indépendance de deux événements
- Représenter la répétition de $n \leqslant 4$ épreuves de Bernoulli par un arbre

I. Rappels sur les probabilités

I.1. Généralités

▸ Définitions 1.1

L'ensemble de toutes les **issues** (ou **éventualités**) possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de cette expérience aléatoire (souvent noté Ω).
Un sous-ensemble de cet univers s'appelle un **événement**. Un événement qui ne contient qu'une seule issue est dit **élémentaire**.
L'événement **impossible** (aucune issue) est noté ∅ et l'événement **certain** (toutes les issues) est Ω.

▸ Propriété 1.1

Une probabilité est toujours un nombre compris **entre 0 et 1**, avec $p(\varnothing) = 0$ et $p(\Omega) = 1$.
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent, et la somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.
Dans le cas où toutes les issues sont **équiprobables** (c'est-à-dire qu'elles ont toutes les mêmes chances de se produire), la **probabilité** d'un événement est le quotient :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles dans l'univers}}.$$

▸ Point histoire

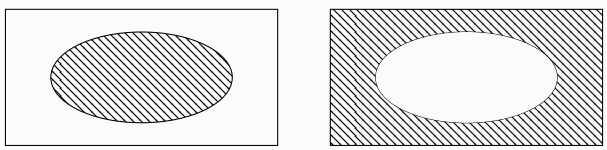


Huygens (1629 – 1695,) et *Cardan* (1501 – 1576,) sont considérés comme les « pères de la théorie des probabilités ». Cependant la mauvaise réputation de Cardan a fait pencher la paternité sur Pascal et Fermat. La notion de « risque », préalable à l'étude des probabilités, apparaît dès le XIII^{e} siècle pour l'évaluation de contrats commerciaux.
Les idées se propagent ensuite en Italie et en France : vers 1620, Galilée écrit un petit mémoire sur le jeu de dés intitulé *Sopra le Scoperte de i Dadi*, dans lequel il suppose l'équipossibilité des lancers. Cette notion d'équipossibilité se retrouve également, plus tard, dans la correspondance de Pierre de Fermat et dans les travaux de Pierre-Simon de Laplace.

I.2. Événements, calculs de probabilités

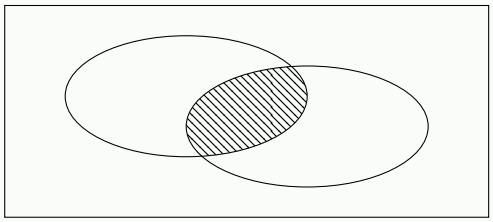
▸ Définition 1.2

L'événement **contraire** (ou complémentaire) $\overline{A}$ d'un événement A se réalise dès que A ne se réalise pas :

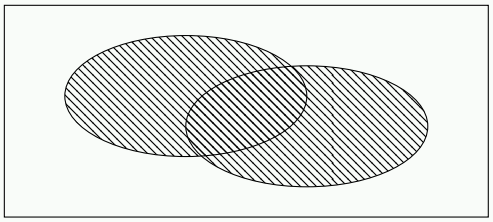


A $\overline{A}$

L'**intersection** $A \cap B$ (lire « A inter B ») de deux événements est l'événement qui se réalise lorsque A **ET** B se réalisent *simultanément*.
La **réunion** $A \cup B$ (lire « A union B ») de deux événements est l'événement qui se réalise lorsque l'*un au moins* des deux événements se réalise (l'un **OU** l'autre **OU** les deux).



$A \cap B$



$A \cup B$

Deux événements A et B sont **incompatibles** (ou disjoints) lorsqu'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps, c'est-à-dire lorsque $A \cap B = \varnothing$.

▸ Propriétés 1.2

Quels que soient les événements A et B :

- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$;
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. *formule de la réunion*

En particulier, si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

▸ Exemple 1.1

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B.
Le tableau ci-dessous présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non Guéri	72	54	126
Total	455	345	800

On choisit au hasard un patient testé, et on appelle A l'événement « le patient a été traité avec le médicament A » et G : « il est guéri ».

- $\overline{A}$ est l'événement : « le patient a été traité avec le médicament B » ;
- $A \cap G$ est l'événement : « le patient a été traité avec le médicament A **et** est guéri » ;
- $A \cup G$ est l'événement : « le patient a été traité avec le médicament A **ou** est guéri ».

On a, de plus :

- $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{455}{800} = \dfrac{345}{800}$;
- $p(A \cap G) = \dfrac{383}{800}$;
- $p(A \cup G) = p(A) + p(G) - p(A \cap G) = \dfrac{455}{800} + \dfrac{674}{800} - \dfrac{383}{800} = \dfrac{746}{800}$.

II. Arbre pondéré, probabilités conditionnelles

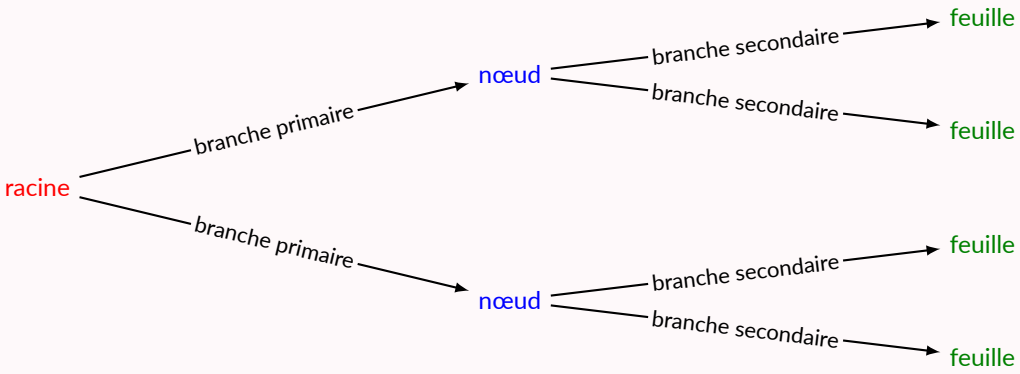
II.1. Utilisation d'un arbre pondéré

▸ Définition 2.1

Un **arbre pondéré** est un arbre de choix dans lequel les **branches** n'ont pas toutes le même poids. Chacune des branches (primaire ou secondaire) est alors affectée d'un nombre précisant la **probabilité** de passer par ce chemin plutôt qu'un autre.
À la **racine** de l'arbre, on trouve toujours l'univers de l'expérience aléatoire, et à chaque **nœud** ou **feuille**, un événement.

Licence Ouverte Etalab 2.0

Illustration 2.1

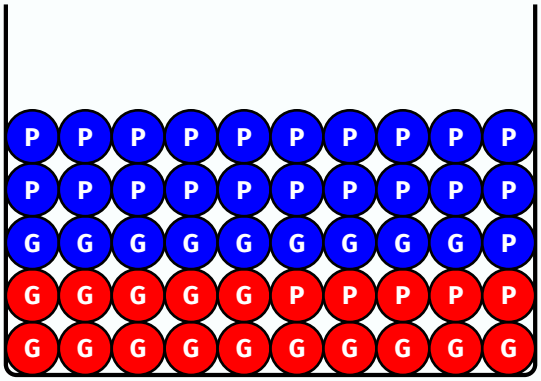


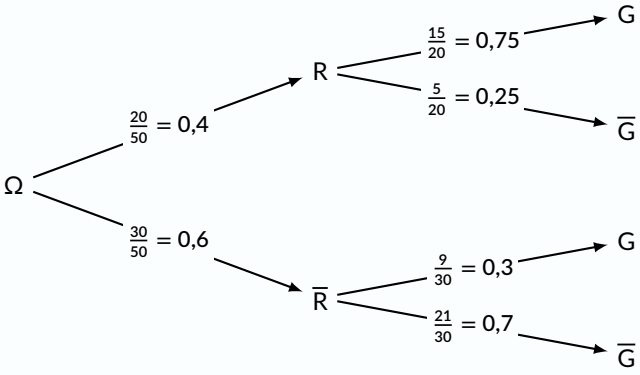
Remarque 2.1

Un arbre n'est pas nécessairement symétrique : le nombre de branches peut varier d'un nœud à l'autre, et les feuilles ne sont pas toujours toutes au même niveau.

Exemple 2.1

Un sac contient 20 boules rouges et 30 boules bleues. Chacune d'entre elles porte l'une des mentions « Gagné » ou « Perdu ». 15 boules rouges et 9 boules bleues sont gagnantes.
On tire au hasard une boule dans le sac, et on appelle R l'événement « La boule tirée est rouge » et G « La boule tirée est gagnante ». On peut schématiser cette expérience par l'arbre pondéré :





Exercice 2.1

Décrire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

Théorèmes 2.1

- La somme des probabilités de toutes les branches partant d'un même nœud est toujours égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités de toutes les branches qui le composent.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins qui mènent à cet événement.

Exemple 2.2

La probabilité d'obtenir une boule rouge gagnante est $\frac{15}{50} = \frac{3}{10} = p(R \cap G)$. Sur l'arbre, on retrouve bien $0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}3$.
La probabilité d'obtenir une boule gagnante est $\frac{15+9}{50} = 0{,}48$.
Sur l'arbre, il y a deux chemins qui mènent à G : le chemin $R \cap G$, de probabilité 0,3 et le chemin $\overline{R} \cap G$ de probabilité $0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$. On retrouve bien $p(R \cap G) + p(\overline{R} \cap G) = 0{,}3 + 0{,}18 = 0{,}48 = p(G)$.

Exercice 2.2

En utilisant l'arbre pondéré ci-dessus, déterminer $p(A)$, $p(B \cap G)$, $p(G)$, $p(\overline{G})$.

Licence Ouverte Etalab 2.0

II.2. Probabilité conditionnelle

▸ Définition 2.2

Lorsqu'on construit un arbre pondéré comme ci-dessus, les probabilités inscrites sur les branches primaires sont des probabilités classiques, mais les probabilités inscrites sur les branches secondaires sont des **probabilités conditionnelles** : ce sont les probabilités d'arriver à ce nœud *sachant que l'on vient de tel autre nœud*.
La probabilité conditionnelle que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé se note $p_A(B)$ (lire « probabilité de B sachant A ») et, si $p(A) \neq 0$:

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

▸ Remarques 2.2

- Si $p(B) \neq 0$, on peut inverser les rôles de A et B dans la formule ci-dessus : $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.
- Si les probabilités conditionnelles du type $p_A(B)$ sont en général données dans les énoncés, il arrive souvent qu'on doive inverser les conditions et calculer par exemple $p_B(A)$. C'est là que la formule est nécessaire.
- **Attention** à ne pas confondre $p_A(B)$ et $p_B(A)$: ces deux nombres n'ont pas le même sens et sont en général différents. Par exemple, dans un test de dépistage, la probabilité que le test soit positif sachant que la personne est malade n'est pas la probabilité que la personne soit malade sachant que son test est positif : c'est la problématique des « faux positifs ».

▸ Exemple 2.3

Parmi les élèves d'une classe, 70 % pratiquent un sport, 40 % pratiquent une autre activité et 10 % pratiquent les deux. On choisit un élève au hasard et on considère S : « l'élève pratique un sport » et A : « l'élève pratique une autre activité ». On a $p(S) = 0{,}7$, $p(A) = 0{,}4$ et $p(S \cap A) = 0{,}1$. La probabilité qu'un élève pratique un sport sachant qu'il pratique une autre activité est :

$$p_A(S) = \frac{p(S \cap A)}{p(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25.$$

▸ Exemple 2.4

$p_R(G) = 0{,}75$ est la probabilité de tirer une boule gagnante *sachant qu'elle est rouge*, autrement dit, la probabilité de tirer une boule rouge gagnante *parmi les rouges*. Cette probabilité découle de la constitution de l'urne.

$p_G(R)$ ne figure pas dans l'arbre. C'est la probabilité d'avoir tiré une boule rouge *sachant qu'elle est marquée gagnante*, autrement dit la probabilité de tirer une boule rouge gagnante *parmi les boules gagnantes*. C'est moins naturel dans ce sens, puisqu'on voit la couleur de la boule avant d'y trouver la marque.

$$p_G(R) = \frac{p(G \cap R)}{p(G)} = \frac{0{,}3}{0{,}48} = 0{,}625.$$

On peut tout de même retrouver cette probabilité grâce à la constitution de l'urne : sur les $15+9 = 24$ boules gagnantes, il y en a 15 rouges et $\frac{15}{24} = 0{,}625$.

▸ Exercice 2.3

Calculer $p_G(A)$ de deux façons différentes : en utilisant l'arbre puis en utilisant le tableau à double entrée.

▸ Propriétés 2.1

Si $p(A) \neq 0$:

- $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$;
- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$. *formule des probabilités composées*
- $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$;
- si les issues sont équiprobables : $p_A(B) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de A}}$.

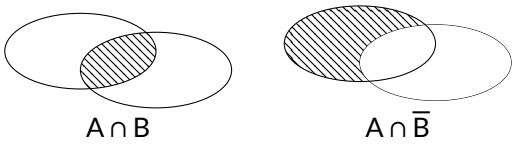
Licence Ouverte Etalab 2.0

▸ **Démonstration 2.1**

– C'est la formule que l'on utilise quand on dit que la probabilité d'un chemin est le produit de celles des branches qui le composent :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \iff p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B).$$

– C'est la formule que l'on utilise quand on dit que la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1 :



En effet, la réunion de $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ est égale à A donc $p_A(\overline{B}) + p_A(B) = \frac{p(A \cap \overline{B})}{p(A)} + \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A)}{p(A)} = 1$.

▸ **Exemple 2.5**

Dans une classe de terminale, 18 filles et 13 garçons ont réussi leur bac, et 1 fille et 3 garçons ne l'ont pas obtenu. On choisit un élève au hasard et on note F : « l'élève est une fille » et R : « l'élève est reçu ».
La probabilité qu'un élève soit reçu sachant que c'est une fille est :

$$p_F(R) = \frac{\text{nombre de filles reçues}}{\text{nombre de filles}} = \frac{18}{19} \approx 0{,}947 \quad \text{(arrondi au millième).}$$

II.3. Formule des probabilités totales

▸ **Définition 2.3**

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une liste d'événements relatifs à une même expérience aléatoire. On dit que ces événements réalisent une **partition** de l'univers si :

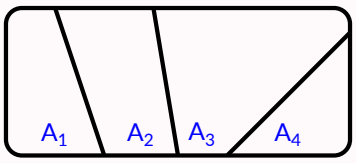
– aucun de ces événements n'est vide ;
– ils sont deux à deux disjoints (c'est-à-dire d'intersection vide) ;
– la réunion de tous ces événements recouvre l'univers tout entier.

▸ **Remarque 2.3**

En particulier, un événement A et son événement contraire $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

▸ **Illustration 2.2**

Pour une partition à 4 éléments :



▸ **Théorème 2.2**

Si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ réalisent une partition de l'univers, alors pour tout événement B :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \ldots + p(A_n \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \ldots + p(A_n) \times p_{A_n}(B).$$

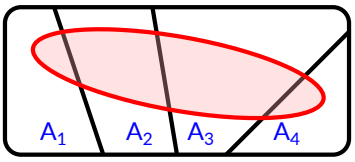
En particulier, pour tous événements A et B :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B).$$

Licence Ouverte Etalab 2.0

▸ Démonstration 2.2

C'est la propriété qu'on utilise quand on dit que la probabilité d'un événement est la somme de toutes les probabilités des chemins qui mènent à cet événement. Elle vient du fait que les événements $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$,..., $A_n \cap B$ sont deux à deux disjoints et recouvrent entièrement B.



▸ Exemple 2.6

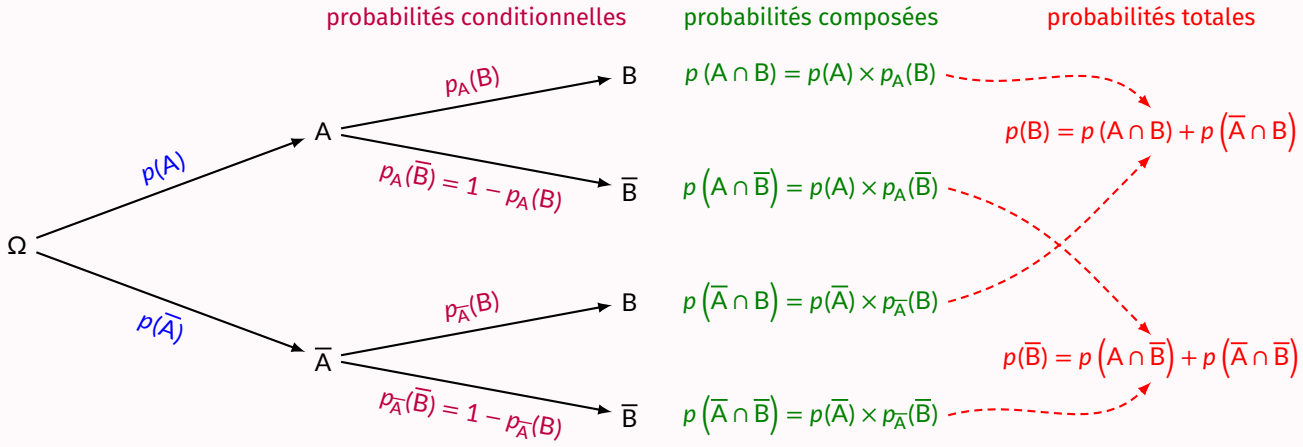
Dans un lycée, 60 % des élèves sont inscrits dans un club de sport. Parmi eux, 55 % sont des filles. Parmi ceux qui ne sont pas inscrits, 60 % sont des filles. On choisit un élève au hasard et on note C : « l'élève est inscrit dans un club de sport » et F : « l'élève est une fille ».
C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, donc :

$$p(F) = p(C \cap F) + p(\overline{C} \cap F) = 0{,}6 \times 0{,}55 + 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}33 + 0{,}24 = 0{,}57.$$

▸ Illustration 2.3

Sur un arbre, on peut visualiser et représenter différentes probabilités mises en jeu :

- des conditionnelles ;
- les composées ;
- les totales.



▸ Méthode 2.1

Pour **inverser** une probabilité conditionnelle, c'est-à-dire calculer $p_B(A)$ alors que l'énoncé donne $p(A)$ et $p_A(B)$:

- calculer $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ (probabilité d'un chemin de l'arbre) ;
- calculer $p(B)$ avec la formule des probabilités totales (somme des chemins qui mènent à B) ;
- conclure avec $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Dans l'exemple du club de sport : $p_F(C) = \dfrac{p(C \cap F)}{p(F)} = \dfrac{0{,}33}{0{,}57} \approx 0{,}579$.

III. Indépendance

III.1. Événements indépendants

▸ Définition 3.1

On dit que deux événements de probabilités non nulles sont **indépendants** s'ils vérifient l'une ou l'autre des propriétés ci-dessous, qui sont équivalentes :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \iff p_A(B) = p(B) \iff p_B(A) = p(A).$$

Autrement dit, la réalisation d'un événement n'influence pas la probabilité de l'autre.

▸ Démonstration 3.1

En effet, a priori on a $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$ donc si les événements sont indépendants :
$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = p(A) \times p_A(B)$ et donc si $p(A) \neq 0$, on retrouve bien $p(B) = p_A(B)$.

▸ Remarque 3.1

Il ne faut pas confondre événements **indépendants** et événements **incompatibles**. Deux événements sont incompatibles lorsque $A \cap B = \varnothing$, donc $p(A \cap B) = 0$: si A et B sont de probabilités non nulles, ils ne peuvent donc *pas* être indépendants, puisque $p(A) \times p(B) \neq 0$.

▸ Exemple 3.1

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On appelle C l'événement « Obtenir un cœur » et D « Obtenir une dame ». $C \cap D$ est alors « Obtenir la dame de cœur ».

- $p(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $p(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $p(C \cap D) = \frac{1}{32}$ et $\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$ donc C et D sont indépendants.

On a aussi $p_C(D) = p(D)$, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir une dame parmi les cœurs est la même que celle d'obtenir une dame parmi toutes les cartes : $\frac{1}{8}$.

Maintenant, si on rajoute deux jokers dans le jeu :

- $p(C) = \frac{8}{34}$ et $p(D) = \frac{4}{34}$ et $p(C \cap D) = \frac{1}{34}$ et $p(C) \times p(D) = \frac{8\times4}{34\times34} \neq p(C \cap D)$ donc C et D ne sont pas indépendants.

De même, $p_C(D) = \frac{1}{8}$ mais $p(D) = \frac{4}{34}$ et ces probabilités ne sont plus égales.

▸ Propriété 3.1

Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

▸ Démonstration 3.2

$p(\overline{A} \cap B) + p(A \cap B) = p(B)$ d'après la formule des probabilités totales, donc, si A et B sont indépendants, $p(\overline{A} \cap B) + p(A) \times p(B) = p(B)$ et ainsi $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A) \times p(B) = p(B)(1 - p(A)) = p(B) \times p(\overline{A})$.

III.2. Succession de deux épreuves indépendantes

▸ Définition 3.2

Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde, on dit qu'il s'agit d'une **succession d'épreuves indépendantes**.

▸ Exemple 3.2

On tire au hasard successivement deux cartes dans un jeu de 32 cartes.
Si on remet la carte avant le deuxième tirage, les conditions initiales sont identiques, donc on peut considérer que les deux tirages sont indépendants.
Si on ne remet pas la carte, la constitution du paquet dépend de la première carte tirée, donc les expériences ne sont pas indépendantes.

▸ Propriété 3.2

Lorsque deux épreuves sont indépendantes, la probabilité d'un couple de résultats est égale au produit des probabilités de chacun d'eux.

Licence Ouverte Etalab 2.0

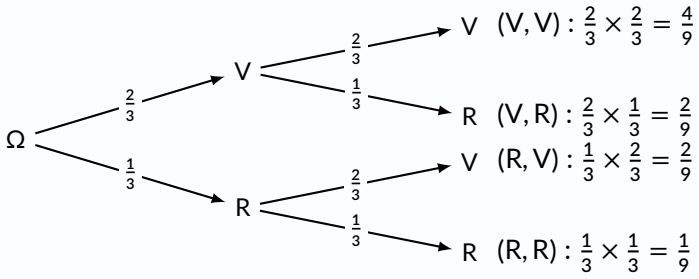
Dans un arbre pondéré, les probabilités portées par les branches du second niveau sont alors les mêmes quel que soit le nœud de départ.

▸ Exemple 3.3

On lance deux fois de suite un dé cubique.
La probabilité d'obtenir un double 5 est $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

▸ Exemple 3.4

Une urne contient deux boules vertes et une boule rouge. On tire deux boules successivement *avec remise*. Les probabilités sont identiques à chaque tirage et la probabilité de chaque chemin s'obtient par produit :



IV. Répétition d'épreuves de Bernoulli

▸ Définition 4.1

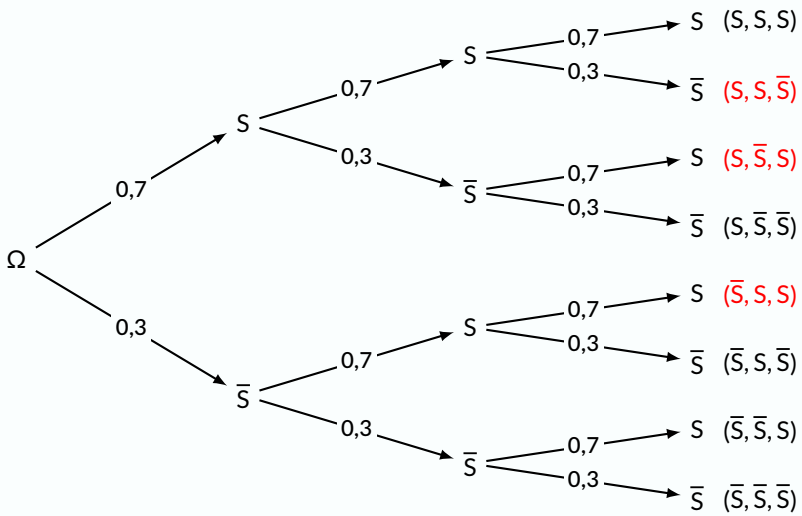
Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues : l'une appelée **succès**, notée S, de probabilité p, et l'autre appelée **échec**, notée $\overline{S}$, de probabilité $1 - p$.
Lorsqu'on répète n fois ($n \leqslant 4$) la même épreuve de Bernoulli de façon **indépendante et identique** (la probabilité de succès p est la même à chaque épreuve), on la représente par un arbre pondéré à n niveaux, dans lequel les probabilités portées par les branches sont les mêmes à chaque niveau.

▸ Remarque 4.1

Les règles de calcul des arbres pondérés s'appliquent : la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches, et la probabilité d'un événement s'obtient en ajoutant les probabilités des chemins qui le réalisent.

▸ Exemple 4.1

Un tireur atteint sa cible avec une probabilité de 0,7 à chaque tir. Il effectue trois tirs successifs, supposés indépendants. Chaque tir est une épreuve de Bernoulli de succès S : « la cible est atteinte », avec $p = 0{,}7$.

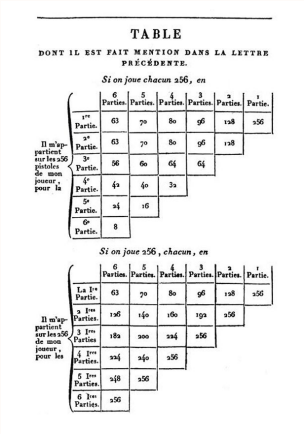


Calculons la probabilité que le tireur atteigne sa cible *exactement deux fois*. Les chemins qui réalisent cet événement sont les trois chemins en rouge. Chacun a pour probabilité $0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}147$. Or ces chemins sont deux à deux

incompatibles, donc on ajoute leurs probabilités :

$$p(\text{« exactement deux succès »}) = 3 \times 0{,}147 = 0{,}441.$$

Point histoire



TABLE

DONT IL EST FAIT MENTION DANS LA LETTRE PRÉCÉDENTE.

Si on joue chacun 256, en

	6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
1re Partie.	63	70	80	96	128	256
2e Partie.	63	70	80	96	128	
3e Partie.	56	60	64	64		
4e Partie.	42	40	32			
5e Partie.	24	16				
6e Partie.	8					

Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la

Si on joue 256, chacun, en

	6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
La 1re Partie.	63	70	80	96	128	256
La 1re Parties	126	140	160	192	256	
3 1res Parties	189	210	224	256		
4 1res Parties.	224	240	256			
5 1res Parties.	248	256				
6 1res Parties.	256					

Il m'appartient sur les 256 de mon joueur, pour les



Blaise Pascal Pierre de Fermat

Le *chevalier de Méré* (17e siècle) était un joueur et souhaitait connaître les stratégies amenant à un plus grand nombre de succès. Il soumet ce problème : « Deux joueurs misent chacun 32 pistoles dans un jeu en trois manches gagnantes. La partie est interrompue alors que le premier joueur a remporté deux manches et le second une seule. Quel doit être alors le gain de chacun des deux joueurs ? » Pascal et Fermat relèvent le défi et on retrouve les réponses dans leurs échanges épistolaires.

Le problème décrit par le chevalier de Méré est un problème historique que l'on trouve déjà dans le *Summa de Arithmetica* de Luca Pacioli (1494). Pascal et Fermat sont les premiers à y apporter une solution mathématique généralisable.

C'est cependant le Hollandais Christiaan Huygens qui publie en 1657 le premier traité mathématique consacré aux probabilités : *De ratiociniis in ludo aleae*. De nos jours, les probabilités constituent une partie très importante des mathématiques.

Source : *LeLivreScolaire*

Humour



Source : *Astérix*, Uderzo & Goscinny